Числа, функции и графики

Как читать формулу как последовательность действий и видеть её смысл на графике?

Шесть ошибок могут означать хороший или плохой результат. Всё зависит от того, сколько было попыток. На этом примере начнём читать математические записи, которые дальше понадобятся для оценки и обучения моделей.

1. Выбрать целое для доли

Пусть программа дала сорок ответов и ошиблась в шести. Чтобы сравнить её с другой программой, недостаточно знать число ошибок: у второй могло быть совсем другое число вопросов. Разделим число ошибок на число всех ответов. Получится `6 / 40 = 0.15`. Это **доля** ошибок. Умножение на сто переводит её в проценты: 15 процентов.

Знаменатель говорит, какую группу мы считаем целым. Шесть ошибок из сорока ответов и шесть ошибок из десяти трудных ответов дают разные доли: 0,15 и 0,6. Обе могут описывать одну программу, но отвечают на разные вопросы. Прежде чем записать дробь, назовите группу словами.

Доля верных ответов равна `34 / 40 = 0.85`. Она также получается как единица минус доля ошибок, если каждый ответ либо верный, либо ошибочный. При наличии отдельной категории «не оценён» сначала нужно договориться, входит ли она в общее число.

Пример

У двух классов разные размеры. В одном ошиблись двое из десяти, в другом четверо из сорока. Во втором ошибок больше по числу, но меньше по доле: 10 % против 20 %.

Если доля ошибок уменьшилась с 20 до 15 процентов, разность равна пяти **процентным пунктам**. Относительное уменьшение составляет `5 / 20 = 0.25`, то есть 25 процентов от прежней доли. Эти две фразы описывают одно изменение в разных единицах. Всегда уточняйте, что именно сравниваете.

> Из 20 ответов ошибочны 6. Какой процент ответов ошибочен?

Профи. Почему проценты не складываются

Процент всегда считается от какой-то базы, поэтому изменение «на p %» — это умножение на $1 + p/100$. Рост на 20 % даёт множитель $1{,}2$, снижение на 20 % — множитель $0{,}8$. Два изменения подряд перемножаются, а не складываются: $100 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8 = 96$, а не 100. Чтобы после роста на 20 % вернуться к прежнему значению, убавить нужно не 20 %, а $1 - 1/1{,}2 \approx 16{,}7$ %.

Та же арифметика стоит за новостями о моделях. Точность выросла с 80 % до 90 %. Доля ошибок упала с 20 % до 10 %, то есть «вдвое» — относительно прежней ошибки, или на 10 процентных пунктов. Сама

точность при этом выросла всего на $10/80 = 12{,}5$ % от прежней. Три фразы описывают одно событие; выбор фразы — вопрос подачи, а не математики.

Чтобы поймать подмену, переведите проценты в штуки. На 1000 ответов было 200 ошибок, стало 100: разница в 100 ответов видна сразу, и никакой множитель её не замаскирует.

> Число было равно 100. Его увеличили на 17 %, а затем результат уменьшили на 17 %. Какое число получилось? Ответ с точностью до сотых.

2. Суммировать и усреднять

Чтобы объединить несколько величин, нужна сумма. Запись $\sum_{i=1}^{n} x_i$ означает: перебрать индексы от одного до n включительно и сложить соответствующие значения. Нижний индекс у x_i называет позицию величины, а не умножение. Для значений 2, 4 и 9 сумма равна 15.

Среднее получается делением суммы на число значений. В этом примере оно равно пяти. Если числа описывают минуты, среднее тоже измеряется в минутах; число наблюдений безразмерно. Такая проверка единиц помогает обнаружить ошибку в формуле.

Квадрат суммы и сумма квадратов различаются. Для 2 и 3 квадрат суммы равен `(2 + 3)² = 25`, а сумма квадратов равна `2² + 3² = 13`. В первом случае сначала складываем, во втором сначала возводим каждое значение в квадрат. Скобки и положение индекса задают действия, поэтому формулу полезно читать как программу.

Средние групп нельзя всегда усреднять поровну. Если в одной группе два результата со средним 10, а в другой восемь со средним 20, общая сумма равна 20 плюс 160. Среднее десяти результатов равно 18. Число 15 получилось бы при равном весе групп, хотя вторая содержит в четыре раза больше наблюдений.

> Числа равны 1, 3 и 5. Чему равна сумма их квадратов?

Обозначения

Запись	Как прочитать
x_i	значение под номером i
n	число значений
$\sum$	сложить по указанным индексам

Эпик. Лучше в каждой группе — хуже в целом

Правило «усреднять с весами, а не поровну» иногда даёт вывод, который противоречит интуиции. Две программы отвечали на вопросы двух типов.

	Лёгкие: ответов / ошибок	Трудные: ответов / ошибок
Программа А	10 / 1	90 / 27
Программа Б	90 / 18	10 / 4

На лёгких вопросах А ошибается в 10 % случаев, Б — в 20 %. На трудных А ошибается в 30 %, Б — в 40 %. В каждой группе А лучше. Но общая доля ошибок у А равна $28/100 = 0{,}28$, а у Б — $22/100 = 0{,}22$: в целом лучше Б.

Это **парадокс Симпсона**. Ошибки в вычислениях нет: общая доля — взвешенное среднее долей по группам, а веса у программ разные. А отвечала в основном на трудные вопросы, Б — на лёгкие.

Какой вывод верен? Оба, но на разные вопросы. «Какую программу взять для вопроса известного типа?» — А. «Какая программа ошибалась реже на том наборе, который ей достался?» — Б. Сравнивать общие доли честно только при одинаковом составе наборов; иначе сравнивают по группам или заранее договариваются о весах.

Та же схема встречается далеко от программ: в приёме в университеты, когда одна группа абитуриентов чаще подаёт заявки на конкурсные факультеты, и в медицине, когда тяжёлых пациентов направляют в лучшую клинику. Одна группа чаще оказывается в трудных условиях, и её общая доля неудач растёт, хотя внутри каждого условия она справляется лучше.

> Программа ошибается в 10 % лёгких вопросов и в 30 % трудных. В наборе из 100 вопросов лёгких 74, остальные трудные. Какой процент всех ответов ошибочен? Ответ с точностью до сотых.

> На лёгких вопросах программа А ошибается реже, чем Б, и на трудных тоже реже. Что из этого следует обязательно?
>
> - ○ Общая доля ошибок А меньше, чем у Б, если доля трудных вопросов в наборах обеих программ одинакова
> - ○ Общая доля ошибок А меньше, чем у Б, на любых наборах вопросов
> - ○ Общая доля ошибок А больше, чем у Б
> - ○ Общие доли ошибок сравнивать нельзя ни при каких условиях

3. Функция связывает вход и выход

Представьте тариф: один рубль за начало поездки и два рубля за каждый километр. Если расстояние обозначить x, стоимость задаётся правилом $f(x) = 2x + 1$. **Функция** каждому допустимому входу ставит в соответствие ровно один выход. При расстоянии три получаем семь; при расстоянии ноль получаем один.

Имя f позволяет ссылаться на правило. Запись $f(3)$ просит подставить число три вместо входа, а не умножить букву на три. Обратный вопрос звучит иначе: какой вход даёт стоимость девять? Решаем `2x + 1 = 9`: вычитаем один, затем делим на два и получаем четыре.

Нужно также задать допустимые входы, или **область определения**. Для расстояния отрицательные числа не имеют смысла, хотя сама алгебраическая формула их допускает. Контекст ограничивает

применение формулы. Перед использованием модели вне привычного диапазона стоит проверить, сохраняется ли смысл величин и самого правила.

Две функции можно выполнить последовательно. Пусть первая переводит километры в стоимость, а вторая прибавляет сервисный сбор три рубля. Тогда общий результат равен `2x + 4`. Это композиция: выход первого правила становится входом второго. Перестановка правил меняет результат, если прибавить три к расстоянию до расчёта тарифа.

Заметка
Одному входу у функции положен один выход. При этом разные входы могут дать один и тот же выход: у квадрата числа 2 и −2 оба превращаются в 4.

> Правило имеет вид `f(x) = 3x + 2`. При каком x результат равен 20?

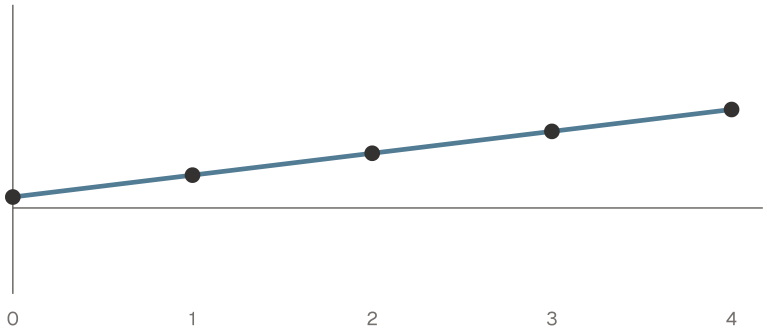
4. Прочитать график и наклон

На графике по горизонтали откладываем вход, по вертикали выход. Для $f(x) = 2x + 1$ точка (3; 7) означает: вход три даёт выход семь. Чтобы построить прямую, достаточно вычислить две её точки; остальные лежат на линии между ними и её продолжениях.

В общем правиле $y = ax + b$ число a задаёт **наклон**, а b значение при нулевом входе. При увеличении x на единицу выход меняется на a. Если наклон положителен, прямая поднимается; если отрицателен, опускается. Нулевой наклон означает постоянный результат.

В опыте сохранено $b = 1$, а ползунок меняет наклон. Предскажите значения для входов 0, 1, 2, 3, 4 при наклоне минус один. После изменения получится 1, 0, −1, −2, −3. При любом наклоне все линии проходят через точку (0; 1), потому что произведение наклона на нулевой вход равно нулю.

Проверьте свой прогноз



y = 2x + 1. Для x = 0, 1, 2, 3, 4 получаем: 1; 3; 5; 7; 9. Прибавка x на 1 меняет y на 2.

Меняйте наклон прямой. Числа под графиком дают результаты для пяти последовательных входов.

Интерактивный эксперимент — в электронной версии урока.

Наклон не равен высоте точки. Две параллельные прямые могут находиться на разных высотах, но одинаково реагировать на изменение входа. Этот смысл позже понадобится в производной: нас будет интересовать, насколько меняется результат при небольшом изменении аргумента.

Ссылки
OpenStax: функции и их графики — дополнительные примеры входа, выхода и области определения.

Профи. **Восстановить правило по двум точкам**

До сих пор правило было дано, а точки вычислялись. На практике чаще наоборот: есть таблица, а правило нужно восстановить. Если точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ лежат на прямой $y = ax + b$, то

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad b = y_1 - a x_1.$$

Первая формула — определение наклона «изменение выхода на единицу входа», записанное для двух конкретных точек. Вторая получается подстановкой первой точки в $y_1 = a x_1 + b$. Для точек (2; 7) и (5; 16) получаем $a = 9/3 = 3$ и $b = 7 - 6 = 1$. Проверка по второй точке: $3 \cdot 5 + 1 = 16$.

Типичная ошибка — взять разности в разном порядке: $(y_2 - y_1)/(x_1 - x_2)$ переворачивает знак наклона. Её ловит подстановка второй точки: с $a = -3$ и $b = 13$ вместо 16 получится -2. Вторая ошибка тоньше: через любые две точки проходит прямая, поэтому две точки не доказывают, что зависимость линейна. Если в таблице есть третья точка (8; 24), подставьте её: $3 \cdot 8 + 1 = 25 \neq 24$. Либо правило не прямая, либо в данных шум — с этой мысли начнётся подбор моделей.

Найти наклон и сдвиг

Цель: По двум точкам вычислите a и b так, чтобы прямая прошла через обе.

```
x1, y1 = 2, 7
x2, y2 = 5, 16
a = 0  # TODO: наклон через разности координат
b = 0  # TODO: сдвиг через первую точку
for x, y in [(x1, y1), (x2, y2)]:
    print(f"x = {x}: прямая даёт {a*x + b}, в таблице {y}")
```

5. Степень и обратная операция

Выражение 2^3 означает три множителя по два и даёт восемь. Число два называют основанием, три показателем степени. У положительного основания нулевая степень равна единице; отрицательный показатель означает обратное число: $2^{-2} = 1/4$.

Логарифм отвечает на обратный вопрос: в какую степень нужно возвести основание, чтобы получить заданное положительное число? Поэтому $\log_2 8 = 3$ и $\log_2 1 = 0$. Для вещественного логарифма аргумент положителен, основание положительно и не равно единице. При основании больше единицы числа между нулём и единицей имеют отрицательный логарифм.

В машинном обучении часто используется натуральный логарифм с основанием e, который обозначают $\ln$. Сейчас достаточно понимать обратимость операции и её область определения. В Python `math.log(x)` вычисляет натуральный логарифм, а `math.log2(x)` логарифм по основанию два. `x ** 2` означает квадрат; знак `^` в Python для степени не подходит.

В упражнении запишите функцию по формуле. Сначала проверьте её на нуле, затем на положительном и отрицательном входе. Отрицательный пример здесь нужен для проверки алгебры; применять такой вход как расстояние мы не собираемся.

Перевести правило в код

Цель: Верните значение функции 2x + 1.

```
def f(x):
    return x  # TODO: запишите правило 2x + 1

print(f"При x = 3 результат равен {f(3)}")
```

Где это встретится дальше

Формула связывает величины. Назовите входы и единицы, выполните действия по порядку и проверьте результат на простом случае.

Вычислить долю и отличить проценты от процентных пунктов.

Прочитать сумму и правило функции.

Связать наклон прямой с изменением выхода.

История

Логарифмы использовали для упрощения длинных вычислений до электронных калькуляторов. Их свойство превращать произведение в сумму объясняет эту роль. OpenStax: логарифмические функции.

Подумай

Попробуйте вход ноль: в прямой останется только свободный член. Затем вход один: результат равен сумме наклона и свободного члена. Эти два значения помогают проверить запись правила.

Домашняя работа

1. Из 50 ответов 8 ошибочны. Найдите процент верных.
2. Для $f(x) = -2x + 5$ найдите $f(3)$ и вход с выходом 1.
3. ★ Подберите два разных входа с одинаковым значением функции x^2.

Источники

- OpenStax: функции (https://openstax.org/books/precalculus-2e/pages/1-introduction-to-functions).
- OpenStax: логарифмы (https://openstax.org/books/precalculus-2e/pages/4-3-logarithmic-functions).
- Python: math (https://docs.python.org/3/library/math.html).